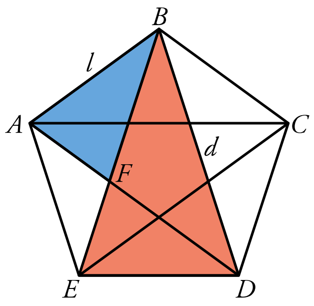
Resol

Pàgina 29

El pentàgon estrellat

Observa el pentàgon estrellat que es mostra a continuació:



1. Demostra que els triangles ABF i EBD són semblants (és a dir, demostra que els angles són respectivament iguals).

2. Si anomenem l el costat del pentàgon i d la diagonal, basant-te en la semblança dels triangles que acabes de demostrar, troba la relació $\frac{d}{l}$ i comprova que és el nombre auri:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

L'angle $\hat{B} = 36°$ en el triangle ABF, i $\hat{B} = 36°$ en el triangle EBD. Per altra banda, els triangles DAB i EBD són iguals; així, l'angle $\hat{A}$ en el triangle ABF, i $\hat{D}$ en el triangle EBD són iguals. Per tant, els triangles són semblants.

El costat $AF = d - l$.

Per la semblança dels triangles ABF i EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; és a dir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operant, $d(d-l) = l^2$, per tant $d^2 - dl - l^2 = 0$.

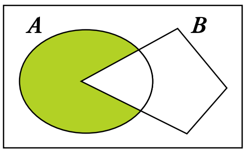
Les solucions possibles per a d són $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Com que d no pot ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Llenguatge matemàtic: conjunts i símbols

Pàgina 31

1 **Cert o fals?**



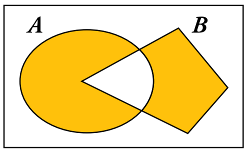
a) El conjunt pintat de l'esquerra es pot designar $A - B$.

Cert, perquè la part pintada està formada per tots els elements de A que no es trobin a B.

b) El conjunt pintat de l'esquerra es pot designar $A \cap B'$.

Cert, perquè la part pintada està formada per tots els elements de A que no es trobin a B, ja que B' és el complementari de B.

c) El conjunt pintat de la dreta es pot designar:



$$(A - B) \cup (B - A)$$

Cert, perquè perquè un element es trobi en el conjunt pintat, o està en A i no està en B, o està en B i no està en A.

d) El conjunt pintat de la dreta es pot designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Cert, perquè perquè un element estigui en el conjunt pintat, ha d'estar en A o en B, però no pot estar en tots dos a la vegada $(A \cap B)$.

e) El conjunt pintat de la dreta es pot designar:

$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Cert, perquè, perquè un element estigui en el conjunt, o està en A i no està en B, o està en B i no està en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Cert, perquè tots els nombres enters són racionals.

g) $[x \in (\dot{3})$ **y** $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ **és el conjunt dels múltiples de** n.

Cert, perquè, si un número és alhora múltiple de 2 i de 3, aleshores és múltiple de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

És la mateixa afirmació anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Cert, perquè els elements de $A - B$ estan en A i no estan en B; aleshores estan en A i en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ **és el mateix que dir** $A \subset B$.

Cert, perquè la implicació indica que tot element de A és un element de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Hem de comprovar que les dues següents afirmacions són certes:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que és l'afirmació de l'apartat j)

$A \subset B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, però, si B conté A, és perquè tots els elements de A estan en B; aleshores són equivalents i és vertadera l'afirmació.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Fals, perquè pot existir algun element de B que no estigui en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **i** $0 < x < 1$

Cert, perquè els intervals representen conjunts de nombres reals i l'interval (0, 1) està format pels nombres compresos entre 0 i 1 que són més grans que 0 i més petites que 1; per tant, són afirmacions equivalents.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **però** $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Cert, perquè $\sqrt{2}$ és un número real que no és racional i és més gran que 1; tanmateix, $\sqrt{2}/2$ també és irracional, però està entre 0 i 1.

o) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Fals, perquè 0,5 és racional.

p) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **és el conjunt dels nombres irracionals positius menors que 1.**

Cert, perquè són els nombres reals que no són racionals, és a dir, irracionals, i, a més, han de ser majors que zero; per tant positius, i menors que 1.

q) $\{x \in \mathbb{Z} \;/\; -2 < x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Cert, perquè els únics nombres enters majors que –2 i menors o iguals que 5 són els del conjunt indicat.

r) El conjunt dels nombres enters majors que –5 i menors que 7 és $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Cert, perquè els nombres enters majors que –5 i menors que 7 estan en l'interval (–5, 7) i, a més, són enters.

s) (*x* es un nombre real, però no és racional) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

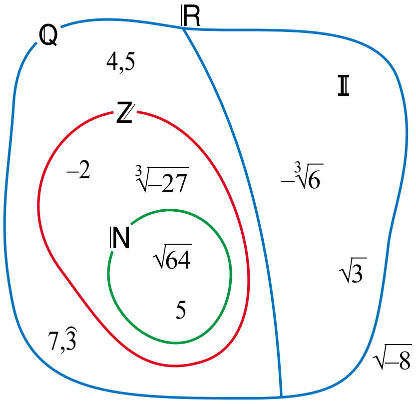
Cert, perquè $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ és el conjunt de tots els nombres reals menys els racionals, que és equivalent a dir els nombres reales que no són racionals.

2 Nombres reals. La recta real

Pàgina 32

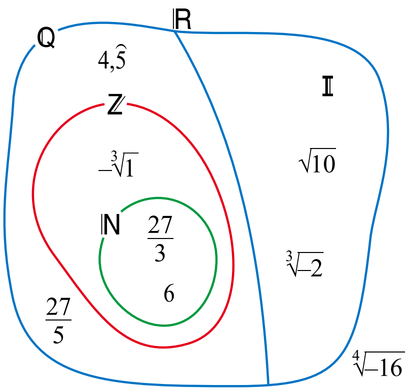
Reflexiona i resol

Observa com se situen aquests nombres en els conjunts numèrics:



Ara, en el quadern, situa els nombres següents en un diagrama semblant:

$-\sqrt[3]{1}$; $4,\widehat{5}$; 6; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; 27/5; 27/3



$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N}$ $\quad 6, \frac{27}{3}, -\sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}$ $\quad 6; \frac{27}{3}; -\sqrt[3]{1}; 4,\widehat{5}; \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$

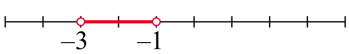
$6; \frac{27}{3}; -\sqrt[3]{1}; 4,\widehat{5}; \frac{27}{5}; \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{I}$ $\quad \sqrt[4]{-16}$ no és real

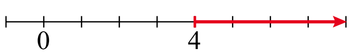
Pàgina 33

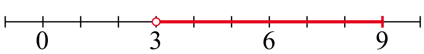
2 Representa els conjunts següents:

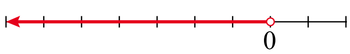
a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

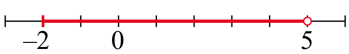
e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **g)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

a) 

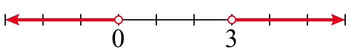
b) 

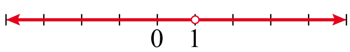
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

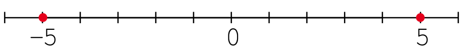
h) 

3 Esbrina i representa per a quins valors de x es compleixen les relacions següents:

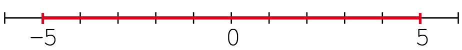
a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \le 2$ **e)** $|x - 4| > 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

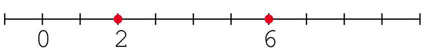
a) 5 i –5



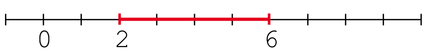
b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$



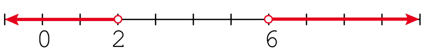
c) 6 i 2



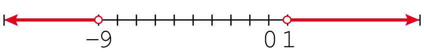
d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$



e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$



f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicals. Propietats

Pàgina 34

4 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Es divideixen índex i exponent entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

5 Quin és major: $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reduïm a índex comú: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Per tant, és major $\sqrt[4]{31}$.

6 Redueix a índex comú.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **i** $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **i** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132\,650}$

7 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Pàgina 35

8 Redueix.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5}\cdot\sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3}\cdot\sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3\cdot(2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Es factoritzen els radicands i es redueix a índex comú:

$\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Es factoritzen els radicands i es redueix a índex comú:

$\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\cdot\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

9 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a\cdot b}}{\sqrt[3]{a\cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}}=\sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}}=\sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{a}}=\sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}=\dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

10 **Redueix.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\dfrac{3^4}{3^3}}=\sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}}=\sqrt[6]{3^4}=\sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}}=\sqrt[10]{2^3}=\sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}}=\sqrt[4]{3^4}=3$

11 **Calcula i simplifica.**

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$

d) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}-\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot a}-\sqrt{2\cdot 3^2\cdot a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$

f) Es factoritzen els radicands i es treuen factors de l'arrel:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=0$

Pàgina 36

12 **Racionalitza denominadors i simplifica tot el que puguis.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 5^2}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2\cdot 5}}{2\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

13 **Racionalitza denominadors i simplifica tot el que puguis.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmes. Propietats

Pàgina 39

14 Troba.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

15 Troba la part entera de...

a) $\log_2 60$. **b)** $\log_5 700$. **c)** $\log_{10} 43\,000$. **d)** $\log_{10} 0{,}084$.

e) $\log_9 60$. **f)** $\ln e$. **g)** $\log_{20} 450\,000$. **h)** $\log_{5,4} 900$.

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Com que $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La part entera de $\log_{20} 450\,000$ és 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Com que $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La part entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

16 **Aplica la propietat ⑧ para obtenir els logaritmes següents amb l'ajuda de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log_2 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 200}$ **c)** $\boldsymbol{log_{100} 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100} 40}$

En cada cas, comprova el resultat usant la potenciació.

a) $\dfrac{log\, 1500}{log\, 2} = 10{,}55;\ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\, 200}{log\, 5} = 3{,}29;\ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\, 200}{log\, 100} = 1{,}15;\ 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\, 40}{log\, 100} = 0{,}80;\ 100^{0{,}80} \approx 40$

17 **Calcula sabent que** $\boldsymbol{log_5 A = 1{,}8}$ **i** $\boldsymbol{log_5 B = 2{,}4}$.

a) $\boldsymbol{log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\, log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\, log_5 A - 2\, log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

18 **Esbrina la relació que hi ha entre** $\boldsymbol{x}$ **i** $\boldsymbol{y}$**, sabent que es verifica:**

$\boldsymbol{ln\, y = 2x - ln\, 5}$

$ln\, y = 2x - ln\, 5 \ \rightarrow\ ln\, y = ln\, e^{2x} - ln\, 5$

$ln\, y = ln\, \dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Expressió decimal dels nombres reals. Nombres aproximats

Pàgina 41

19 **Cert o fals?**

I. El preu d'aquest habitatge és, aproximadament, de 390 000 €, amb un error menor que 10 000 €.

II. El preu del menú del dia és, aproximadament, de 12 €, amb un error menor que 1 €.

En I l'error absolut és molt major que en II, però l'error relatiu és menor.

I. E.R. $< \dfrac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \dfrac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

L'error absolut ens el diuen i és major en I que en II. Hem calculat l'error relatiu en cada cas i veiem que és vertadera l'afirmació.

20 **Digues una fita de l'error absolut i una altra de l'error relatiu en els mesuraments següents:**

a) En Daniel diu a la seva germana Maria que la superfície de casa seva és de 96,4 m^2.

b) Per culpa de la grip s'han perdut 37 milions d'hores de treball.

c) La Joana guanya uns 19 000 € a l'any

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \dfrac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. $< 0{,}5$ milions d'hores = 500 000 hores

E.R. $< \dfrac{0{,}5}{37} < 0{,}014 \to 1{,}4\,\%$

c) — Si suposem que els tres zeros finals s'han utilitzat per poder expressar la quantitat (és a dir, que es tracta de 19 mil, arrodonint als milers d'euros), aleshores:

E.A. $< 0{,}5$ milers de € = 500 € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19} < 0{,}027 \to 2{,}7\,\%$

— Si suposem que és 19 000 € exactament:

E.A. $< 0{,}5$ € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19000} < 0{,}000027 \to 0{,}0027\,\%$

Pàgina 42

21 **Calcula en notació científica sense usar la calculadora:**

a) $(800000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$ **b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$**

a) $(800000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-}9 - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

22 **Opera amb la calculadora:**

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$ **b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$**

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

7 Fórmula del binomi de Newton

Pàgina 45

23 **Desenvolupa:**

a) $(x+3)^5$ **b)** $(2x-x^2)^4$ **c)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6$

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4\cdot 3 + \binom{5}{2}x^3\, 3^2 + \binom{5}{3}x^2\, 3^3 + \binom{5}{4}x\cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $(2x-x^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3\cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2\cdot(x^2)^2 - \binom{4}{3}2x\cdot(x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 =$

$= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^6 =$

$= \frac{15}{4x^2} + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{64}x^6 + \frac{5}{2}$

24 **Calcula el coeficient de x^5 en el desenvolupament del binomi:**

$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$

Obtenim el terme $k+1$ de l'expressió $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$:

$\binom{7}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k$

El grau de x en aquest terme és $2(7-k)-k$, que ha de ser igual a 5:

$2(7-k)-k = 5 \Rightarrow k = 3$

El terme de grau 5 és $\binom{7}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(-\frac{3}{x}\right)^3 = -\frac{945}{16}x^5$.

El coeficient demanat és $-\frac{945}{16}$.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 46

1. Intervals i valor absolut

Fes-ho tu. **Per a quins valors de x es verifica $|3x-7|<5$?**

Seguim el raonament de l'apartat a) de l'exercici 1 d'aquesta pàgina:

$3x-7<5 \rightarrow x<4$

$3x-7>-5;\ 3x>-2 \rightarrow x>\frac{2}{3}$

Els valors que verifiquen l'expressió són els de l'interval $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$.

3. Operacions amb radicals

Fes-ho tu. **Simplifica:**

a) $\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$

a) Factoritzem i traiem factors de les arrels:

$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\sqrt{2^5}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reduïm els radicals a índex comú i traiem factors de les arrels:

$$\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{8^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{(a^2)^2b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^3b^3}\sqrt[6]{a^4b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^7b^5}=2\sqrt{2}\,a\sqrt[6]{ab^5}$$

Pàgina 47

4. Racionalització de denominadors

Fes-ho tu. **Racionalitza:**

a) $\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$

b) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multipliquem numerador i denominador per $\sqrt[4]{5}$:

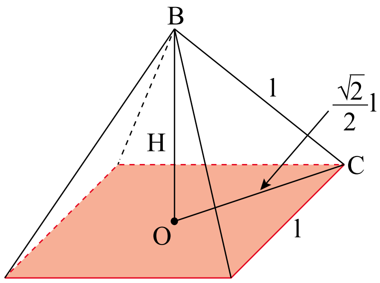
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multipliquem numerador i denominador per $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot5-9}=2\sqrt{5}-3$$

5. Problemes amb radicals

Fes-ho tu. El volum d'una piràmide quadrangular regular és $\frac{256}{3}\sqrt{2}$. Troba la longitud de l'aresta.



L'aresta de la cara triangular és igual a l'aresta de la base.

$V_{Piràmide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3}l^2 \cdot H = \frac{256}{3}\sqrt{2}$

La distància $\overline{OC}$ és la meitat de la diagonal del quadrat $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

L'aresta és la hipotenusa del triangle rectangle de catets l'altura H i el costat $\overline{OC}$.

Por ser l'aresta igual al costat de la base, $H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{1}{2}l^2$

$V_{Piràmide} = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$

Per tant, $\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3 = \frac{256}{3}\sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$

Pàgina 48

7. Logaritmes. Propietats

Fes-ho tu. Calcula x en aquests casos:

a) $\log_7 x = -2$ **b)** $\ln 3^{x-1} = 5$ **c)** $2\log x - \log 4 = 2\log 3$

a) $\log_7 x = -2$

Utilitzem la definició de logaritme: 2 és l'exponent que ha de tenir la base 7 perquè ens doni x:

$x = 7^{-2};\ x = \frac{1}{49}$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

Apliquem la propietat dels logaritmes: $\log_a m^n = n\log_a m$.

$(x-1)\ln 3 = 5 \rightarrow x - 1 = \frac{5}{\ln 3} \rightarrow x = \frac{5}{\ln 3} + 1 \rightarrow x = 5{,}5512$

c) $2\log x - \log 4 = 2\log 3$

Apliquem les propietats dels logaritmes:

$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$

$\log \frac{x^2}{4} = \log 9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Solucions: $x = -6,\ x = 6$

Però, com que no es poden fer logaritmes de nombres negatius, l'única solució vàlida és $x = 6$.

8. Logaritmes. Demostració d'una propietat

Fes-ho tu. **Demostra que: $log_a (P/Q) = log_a P - log_a Q$**

$$log_a \frac{P}{Q} = log_a P - log_a Q$$

Anomenem $log_a P = x$; $log_a Q = y$

Expressem P i Q com a potències utilitzant la definició de logaritme:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostració:

$$log_a \frac{P}{Q} = log_a \frac{a^x}{a^y} = log_a a^{x-y} = x - y = log_a P - log_a Q$$

9. Factorials i nombres combinatoris

Fes-ho tu. **Calcula m en aquesta expressió: $C_2^m = 3!$**

$C_2^m = 3!$

$$\frac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\frac{m^2 - m}{2} = 6;\ m^2 - m = 12;\ m^2 - m - 12 = 0;\ m = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$$

Com que m ha de ser positiu, $m = 4$.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 49

1. Simplificació de radicals

Simplifica aquesta expressió:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor d'un exponent

Calcular x perquè es compleixi la igualtat:

$$3^{x-1} = 173$$

$log_3 3^{x-1} = log_3 173$; $(x-1) log_3 3 = log_3 173$

$x - 1 = log_3 173 = 4{,}69$; $x = 4{,}69 + 1 = 5{,}69$

3. Extracció de factors d'un radical

Extreu fora del radical els factors que sigui possible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a+2b)^2} = (2a+2b)\sqrt{cd} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

4. Propietats dels logaritmes

Esbrina la relació que hi ha entre M, x i y si sabem que:

$$\ln M = \frac{1}{4}(2\ln x + 3\ln y - 5\ln 2)$$

$$\ln M = \frac{1}{4}(2\ln x + 3\ln y - 5\ln 2) = \frac{1}{4}(\ln x^2 + \ln y^3 - \ln 2^5) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2\cdot y^3}{2^5} = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

5. Fites d'error absolut i relatiu

Fita l'error que es comet en prendre 1,62 com a aproximació del nombre d'or ϕ.

E.A. $< 0{,}005$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3{,}0902\cdot 10^{-3} = 0{,}003$

Correspon a un error relatiu menor que 0,3 %.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 50

Per practicar

Nombres racionals i irracionals

1 **Classifica els següents nombres indicant a quins dels conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertanyen:**

$$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}$$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **Quins d'aquests nombres són irracionals? Expressa com a fracció els que sigui possible.**

a) 3,181818… **b)** $\sqrt{1,\widehat{7}}$ **c)** $\sqrt{8}$

d) 1,020020002… **e)** –4,0333… **f)** $\sqrt[3]{81}$

g) 1,3999… **h)** 2π

a) $3,181818\ldots = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

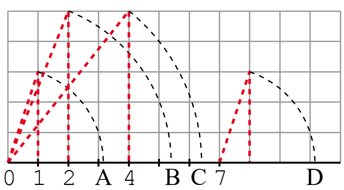
d) 1,020020002… Irracional.

e) $-4,0333\ldots = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999\ldots = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 

Quins nombres irracionals representen els punts A, B, C i D? Justifica la resposta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

Intervals i valor absolut

4 **Representa gràficament i expressa com a interval o com a semirecta els nombres que compleixen la condició establerta en cada cas.**

a) x **és menor que –5.**

b) 3 és menor o igual que x**.**

c) x **està comprès entre –5 i 1.**

d) x **està entre –2 i 0, ambos inclosos.**

e) x **és major o igual que –3 i menor que 2.**

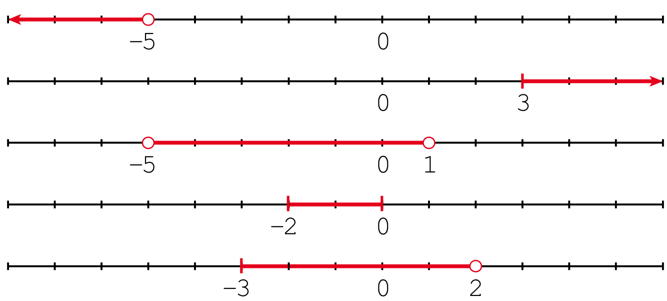
a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$

b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$

c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$



5 **Escriu la desigualtat que verifica tot nombre x que pertany a aquests intervals o semirectes:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$
d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

6 **Expressa com un únic interval.**

a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **b)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

7 **Expressa en forma d'interval els nombres que compleixen cada una d'aquestes expressions:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \ge 5$ **c)** $|2x| < 8$
d) $|x-1| \le 6$ **e)** $|x+2| > 9$ **f)** $|x-5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

8 **Escriu, mitjançant intervals, els possibles valors de x perquè es pugui calcular l'arrel en cada cas.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$
d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; $[-2, +\infty)$

9 **Expressa-ho com un únic interval.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ **b)** $[-1, 3) \cup (0, 3]$ **c)** $(1, 6] \cap [2, 7)$ **d)** $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

10 **Escriu en forma d'interval els entorns següents:**

a) Centre –1 i radi 2 **b) Centre 2 i radi 1/3**

a) $(-1 -2, -1 + 2) = (-3, 1)$ b) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

11 **Descriu com a entorns els intervals següents:**

a) $(-1, 2)$ **b)** $(1{,}3; 2{,}9)$ **c)** $(-2{,}2; 0{,}2)$ **d)** $(-4; -2{,}8)$

a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$ Entorn de centre $\frac{1}{2}$ i radi $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1{,}3+2{,}9}{2} = 2{,}1$; $R = 2{,}9 - 2{,}1 = 0{,}8 \rightarrow$ Entorn de centre 2,1 i radi 0,8.

c) $C = \frac{-2{,}2+0{,}2}{2} = -1$; $R = 0{,}2 - (-1) = 1{,}2 \rightarrow$ Entorn de centre –1 i radi 1,2.

d) $C = \frac{-4+(-2{,}8)}{2} = -3{,}4$; $r = -2{,}8 - (-3{,}4) = 0{,}6 \rightarrow$ Entorn de centre –3,4 i radi 0,6.

Radicals

12 **Introdueix els factors dins cada arrel.**

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ e) $2\sqrt[4]{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2\cdot 3x}{x^2\cdot 2^3}}=\sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5}{5^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

13 **Treu de l'arrel el factor que puguis.**

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2+4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt{2^3}=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2^3\cdot 5^3}=10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3\cdot a^5}=2a\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{\frac{5^3\cdot a^2}{2^4\cdot b}}=\frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$ f) $\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$ h) $\sqrt{4(a^2+1)}=2\sqrt{a^2+1}$ i) $\sqrt{\frac{25a}{16\cdot 9}}=\frac{5\sqrt{a}}{12}$

14 **Simplifica els radicals següents:**

a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625}:\sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ h) $\sqrt[8]{0,0016}$ i) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[6]{3^3}=3^{3/6}=3^{1/2}=\sqrt{3}$ c) $-\sqrt[3]{3^3\cdot 2^2}=-3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6\cdot y^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot y}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}}=\frac{3}{\sqrt{2^3}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4}:\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}:\sqrt{5}=1$

g) $\sqrt[6]{0,027}=\sqrt[6]{10^{-3}3^3}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}}=\sqrt{\frac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0,0016}=\sqrt[8]{10^{-4}2^4}=\sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}}=\sqrt{\frac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}=\sqrt[4]{\frac{25}{16}}=\sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

15 **Redueix a índex comú i ordena de menor a major.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ d) $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125};\ \sqrt[12]{81};\ \sqrt[12]{64}\ \rightarrow\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16}\ \rightarrow\ \sqrt[3]{4}<\sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10000}\ \rightarrow\ \sqrt[4]{6}<\sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000}\ \rightarrow\ \sqrt[3]{9}<\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{20}$

16 **Fes l'operació i simplifica, si és possible.**

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27\cdot 6}=20\sqrt{3^3\cdot 2\cdot 2}=20\sqrt{2\cdot 3^4}=180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}}=2\sqrt{\frac{9}{2}}=6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

d) $\sqrt[3]{(2^2\cdot 3)^2}=\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2}=2\sqrt[3]{2\cdot 3^2}=2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3=\sqrt[6]{2^{15}}=\sqrt{2^5}=2^2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}:\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3}=2$

17 **Realitza i simplifica, si és possible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$ **c)** $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3=\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3=\sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{3}$

18 **Expressa-ho com una única arrel.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^7}=\sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}}=\sqrt[20]{a^{21}}=a\sqrt[20]{a}$

Pàgina 51

19 **Racionalitza els denominadors i simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{9-3\sqrt{3}}{6}=\frac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6}=\frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{12}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multipliquem numerador i denominador per $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

20 **Calcula i simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\dfrac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

21 **Simplifica les expressions següents:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$ **c)** $\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{7}{2}\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=$

$=\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\dfrac{12}{5}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\left(1-\dfrac{12}{5}+\dfrac{7}{3}\right)\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{14}{15}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

c) $\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\dfrac{7}{3}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\dfrac{21}{5}-2a-\dfrac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

22 **Realitza i simplifica.**

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ **c)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ **d)** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

23 **Racionalitza i simplifica.**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ **e)** $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\dfrac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\dfrac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\dfrac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\dfrac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

24 **Realitza i simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

Logaritmes

25 **Expressa-ho com a potència de la base i calcula aplicant la definició de logaritme.**

a) $\log_2 1\,024$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ **e)** $\log_3 \sqrt{3}$ **f)** $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **h)** $\log_{\pi} 1$ **i)** $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10} = 10$ b) $\log 10^{-3} = -3$ c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $\log_3 3^{1/2} = \dfrac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2} = \dfrac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $\ln e^{-1/3} = -\dfrac{1}{3}$

26 **Calcula la base d'aquests logaritmes:**

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \dfrac{1}{9} = -2$ **c)** $\log_x \dfrac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \dfrac{1}{2}$ **e)** $\log_x 0{,}04 = -2$ **f)** $\log_x 4 = -\dfrac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ b) $x^{-2} = \dfrac{1}{9} \rightarrow x = 3$ c) $x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$ e) $x^{-2} = 0{,}04 \rightarrow x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \dfrac{1}{16}$

27 **Calcula el valor de x en aquestes igualtats:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ **e)** $\log_7 3x = 0{,}5$ **f)** $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$ e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$

28 **Troba amb la calculadora i comprova el resultat mitjançant potenciació.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \rightarrow e^{26,161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0{,}034$

29 **Desenvolupa les expressions següents:**

a) $\log \dfrac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2\sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log\sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \dfrac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}e^5}{\sqrt{y}} = \ln\sqrt[4]{x^3}e^5 - \ln\sqrt{y} = \ln\sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}\ln x + 5 - \dfrac{1}{2}\ln y$

30 **Troba el valor de x en aquestes expressions aplicant les propietats dels logaritmes:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3\ln 5 - 2\ln 10$ d) $\log x = 3\log 2 - \dfrac{1}{2}\log 25$

a) $\ln x = \ln(17\cdot 13) \Rightarrow x = 17\cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log\dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2$; $\ln x = \ln\dfrac{5^3}{10^2}$; $x = \dfrac{5^3}{5^2\cdot 2^2}$; $x = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2}$; $\log x = \log 2^3 - \log 5$; $\log x = \log\dfrac{8}{5}$; $x = \dfrac{8}{5}$

31 **Si $\log k = x$, escriu en función de x.**

a) $\log 100k$ b) $\log\dfrac{k}{1000}$

c) $\log k^3$ d) $\log\sqrt[3]{10k}$

e) $\log\dfrac{1}{k}$ f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$ b) $\log k - \log 1000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$ d) $\dfrac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$ f) $\sqrt{x}$

32 **Esbrina, en cada cas, la relació entre x, y, z.**

a) $\log z = 2\log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \dfrac{1}{2}\log y$

c) $\log z = 1 - \dfrac{1}{2}(\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2\ln x + 2\ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y$; $\log z = \log\dfrac{x^2}{y}$; $z = \dfrac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log\sqrt{y}$; $\log z = \log\dfrac{100}{x\sqrt{y}}$; $z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x}{y}$; $\log z = \log 10 - \log\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\log z = \log\dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$; $z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2$; $\ln z = \ln\dfrac{e\cdot y^2}{x^2}$; $z = \dfrac{e\cdot y^2}{x^2}$

Notació científica i errors

33 **Realitza i dóna el resultat en notació científica amb tres xifres significatives. Determina també, en cada cas, una cota de l'error absolut i una altra de l'error relatiu comesos.**

a) $\dfrac{(3,12\cdot10^{-5}+7,03\cdot10^{-4})\,8,3\cdot10^{8}}{4,32\cdot10^{3}}$

b) $\dfrac{(12,5\cdot10^{7}-8\cdot10^{9})\,(3,5\cdot10^{-5}+185)}{9,2\cdot10^{6}}$

c) $\dfrac{5,431\cdot10^{3}-6,51\cdot10^{4}+385\cdot10^{2}}{8,2\cdot10^{-3}-2\cdot10^{-4}}$

a) $1,41\cdot10^2$; E.A. $< 0,005\cdot10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58\cdot10^5$; E.A. $< 0,005\cdot10^5 = 5\cdot10^2$

E.R. $< \dfrac{5\cdot10^2}{1,58\cdot10^5} < 3,16\cdot10^{-3}$

c) $-2,65\cdot10^6$; E.A. $< 0,005\cdot10^6 = 5\cdot10^3$

E.R. $< \dfrac{5\cdot10^3}{2,65\cdot10^6} < 1,89\cdot10^{-3}$

34 **Expressa en notació científica i calcula:** $\dfrac{60\,000^3\cdot0,00002^4}{100^2\cdot72\,000\,000\cdot0,0002^5}$

$$\frac{(6\cdot10^4)^3\cdot(2\cdot10^{-5})^4}{10^4\cdot7,2\cdot10^7\cdot(2\cdot10^{-4})^5}=150$$

Pàgina 52

35 **Ordena de major a menor los números de cada apartat. A tal fi, passa a notació científica els que no ho estiguin.**

a) $3,27\cdot10^{13}$; $85,7\cdot10^{12}$; $453\cdot10^{11}$

b) $1,19\cdot10^{-9}$; $0,05\cdot10^{-7}$; $2000\cdot10^{-12}$

a) $8,57\cdot10^{13} > 4,53\cdot10^{13} > 3,27\cdot10^{13}$

b) $5\cdot10^{-9} > 2\cdot10^{-9} > 1,19\cdot10^{-9}$

36 **Si** $A = 3,24\cdot10^6$; $B = 5,1\cdot10^{-5}$; $C = 3,8\cdot10^{11}$ **i** $D = 6,2\cdot10^{-6}$**, calcula** $\left(\dfrac{A}{B}+C\right)\cdot D$**. Expressa el resultat amb tres xifres significatives i dóna una cota de l'error absolut i una altra de l'error relatiu comesos.**

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D=\left(\frac{3,24\cdot10^6}{5,1\cdot10^{-5}}+3,8\cdot10^{11}\right)\cdot6,2\cdot10^{-6}=\left(\frac{3,24}{5,1}10^{11}+3,8\cdot10^{11}\right)\cdot6,2\cdot10^{-6}=$$

$$=\left(\frac{3,24}{5,1}+3,8\right)10^{11}\cdot6,2\cdot10^{-6}=4,4353\cdot6,2\cdot10^5=2,7499\cdot10^6$$

Com que volem tres xifres significatives, la solució que donem és: $S = 2,75\cdot10^6$

E.A. < 5000

E.R. $< \dfrac{5000}{2,74\cdot10^6} = 1,8248\cdot10^{-3} = 0,0018248$, que correspon a un 0,18 %.

Factorials i nombres combinatoris

37 **Calcula.**

a) $\dfrac{8!}{5!}$ b) $\dfrac{10!}{9!}$ c) $\dfrac{5!+4!}{12}$

a) $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=8\cdot7\cdot6=336$

b) 10

c) $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1\,(5+1)}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=$

$=\dfrac{1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5}=\dfrac{1}{3326400}$

38 **Calcula.**

a) $\dbinom{8}{4}$ b) $\dbinom{12}{7}$ c) $\dbinom{37}{35}$ d) $\dbinom{84}{1}$

a) $\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

b) $\dfrac{12!}{7!5!}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$

c) $\dfrac{37!}{35!2!}=\dfrac{37\cdot36}{2}=666$

d) $\dfrac{84!}{83!1!}=\dfrac{84\cdot83!}{83!1!}=84$

39 **Aplica les propietats dels nombres combinatoris per obtenir *n*.**

a) $\dbinom{6}{n+2}=1$ b) $\dbinom{8}{n-3}=8$ c) $\dbinom{9}{2}=\dbinom{9}{n}$

d) $\dbinom{13}{n-1}=\dbinom{13}{n+2}$ e) $\dbinom{10}{n}+\dbinom{10}{n+1}=\dbinom{11}{7}$ f) $\dbinom{n}{7}=\dbinom{n}{9}$

a) $n+2=6\ \rightarrow\ n=4;\ \ n+2=0\ \rightarrow\ n=-2$

b) $n-3=1\ \rightarrow\ n=4;\ \ n-3=7\ \rightarrow\ n=10$

c) $n=2$ o $n=9-2=7$

d) $n-1+n+2=13;\ \ 2n+1=13\ \rightarrow\ n=6$

e) $n=6$

f) $n=7+9=16$

Binomi de Newton

40 **Desenvolupa.**

a) $(a^2-3b)^7$ b) $\left(\dfrac{a}{3}+2b\right)^5$

a) $\dbinom{7}{0}(a^2)^7+\dbinom{7}{1}(a^2)^6(-3b)+\dbinom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2+\dbinom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3+$

$+\dbinom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4+\dbinom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5+\dbinom{7}{6}(a^2)(-3b)^6+\dbinom{7}{7}(-3b)^7=$

$=a^{14}-21a^{12}b+189a^{10}b^2-945a^8b^3+2835a^6b^4-5103a^4b^5+5103a^2b^6-2187b^7$

b) $\dbinom{5}{0}\left(\dfrac{a}{3}\right)^5+\dbinom{5}{1}\left(\dfrac{a}{3}\right)^4 2b+\dbinom{5}{2}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3(2b)^2+\dbinom{5}{3}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2(2b)^3+\dbinom{5}{4}\left(\dfrac{a}{3}\right)(2b)^4+\dbinom{5}{5}(2b)^5=$

$=\dfrac{1}{243}a^5+\dfrac{10}{81}a^4b+\dfrac{40}{27}a^3b^2+\dfrac{80}{9}a^2b^3+\dfrac{80}{3}ab^4+32b^5$

41 **Troba el novè terme del desenvolupament de $(x^2-y^2)^{12}$.**

Terme novè: $\dbinom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8=495x^8y^{16}$

42 **Troba el terme central del desenvolupament de $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{2}\right)^6$.**

Terme central: $\dbinom{6}{3}(\sqrt{a})^3\left(\dfrac{b}{2}\right)^3=\dfrac{20}{8}a^{3/2}b^3=\dfrac{5}{2}a^{3/2}b^3$

43 **Calcula el coeficient de x^5 en el desenvolupament de $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^7$.**

El terme $k + 1$ del desenvolupament és: $\binom{7}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{7-k}(-x^3)^k$

La potència de x en aquest terme és: $x^{-(7-k)+3k}$

Com que volem que l'exponent de x sigui 5: $-(7-k) + 3k = 5$; $k = 4$

$\binom{7}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^4(-x^3)^3 = -560x^5$. El coeficient de x^5 és -560.

44 **Calcula el cinquè terme del desenvolupament de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$.**

Terme cinquè: $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4(-2x)^4 = \frac{1120}{x^4}$

45 **Calcula el coeficient del sisè terme del desenvolupament de $\left(\frac{x}{2} + 3x^2\right)^8$.**

Terme sisè: $\binom{8}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^3(3x^2)^5 = 1701x^{13}$

El coeficient sisè és 1 701.

Per resoldre

46 **El volum d'un cub és $6\sqrt{6}$ cm^3. Troba:**

a) La seva aresta.

b) La diagonal d'una cara.

c) La diagonal del cub.

Dóna, en cada cas, el valor exacte.

a) $V_{Cub} = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}}$; $a = \sqrt[3]{\sqrt{6^2 \cdot 6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$ cm

b) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ cm

c) $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ cm

47 **La superfície d'un tetraedre és $9\sqrt{3}$ cm^2. Calcula la seva aresta i el seu volum. Dóna el valor exacte.**

Un tetraedre té 4 cares iguals. La superfície de cada cara és: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2

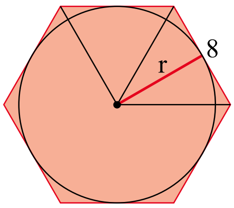
Cada cara és un triangle equilàter, en el qual $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$

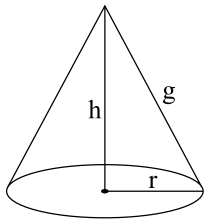
$A_{Cara} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$ cm

$V_{Tetraedre} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{9}{8}a$ cm^3 $= \frac{27}{8}$ cm^3

48 **En un prisma hexagonal de costat 8 dm i altura 12 dm, s'inscriu un con. Calcula'n l'àrea lateral amb una xifra decimal i dóna una fita de l'error absolut i una fita de l'error relatiu comesos.**

Ara calcularem el radi de la base del con inscrit en l'hexagon regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

L'altura del con coincideix amb la del prisma hexagonal, $h = 12$ dm

La generatriu del con és $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

La superfície lateral del con és:

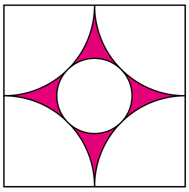
$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59 \text{ dm}^2$

$A_{Lateral} = 301{,}6 \text{ dm}^2$

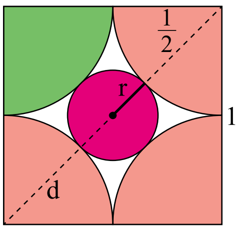
E.A. $< 0{,}05 \text{ dm}^2$

E.R. $< \dfrac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equival a un 0,02 %.

49



Troba l'àrea de la part pintada d'aquesta figura en què el costat del quadrat mesura 1 m. Expressa l'àrea en decímetres quadrats amb tres xifres significatives i fita l'error comès.



L'àrea demanada és l'àrea del quadrat, menys quatre vegades l'àrea verda i menys l'àrea vermella.

Quatre vegades l'àrea verda és l'àrea d'un cercle de radi $\frac{1}{2}$, és a dir, $4A_{Verda} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Anomenem d la diagonal del quadrat: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculem el radi: $r = \dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$

L'àrea vermella es l'àrea del cercle de radi $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

$A_{Vermella} = \pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

Àrea demanada $= A_{Quadrat} - 4A_{Verda} - A_{Vermella} = 1 - \dfrac{1}{4}\pi - \left(\dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7{,}9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7{,}98 \text{ dm}^2$

E.A. $< 0{,}005 \text{ dm}^2$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{7{,}9849 \cdot 10^{-2}} = 6{,}2618 \cdot 10^{-2} = 0{,}062618$, que equival al 6,26 %.

50 **Un fil de coure, la resistivitat del qual és $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$, mesura 2 m de llarg i té un diàmetre de 0,2 mm. Calcula'n la resistència aplicant-hi la fórmula $R = \rho\ l/S$ on l és la longitud del fil i S, l'àrea de la secció d'aquest.**

$S = \pi \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}12566$

La resistència és: $R = \frac{p \cdot l}{S} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{0{,}12566} = 2{,}7057 \cdot 10^{-7}$ Z

51 **Si coneixem la longitud d'ona d'una radiació lluminosa, podem calcular-ne la freqüència (nombre de vibracions per minut) mitjançant la fórmula $v = c/\lambda$, on c és la velocitat de la llum i λ, la longitud d'ona. Calcula la freqüència d'una radiació vermella ($\lambda_{\text{ver mell}} = 7\,000$ Å; 1 Å = 10^{-10} m). Fita l'error comès.**

$v = \frac{c}{1} = \frac{3 \cdot 10^8}{7\,000 \cdot 10^{-10}} = 4{,}2857 \cdot 10^{14}$ vibracions per segon

$4{,}2857 \cdot 10^{14} \cdot 60 = 2{,}5714 \cdot 10^{16}$ vibracions per minut

E.A. $< 5 \cdot 10^{11}$ vibracions per minut

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{11}}{2{,}5714 \cdot 10^{16}} = 1{,}9445 \cdot 10^{-5} = 0{,}000019445$, que equival al 0,002 %.

52 **La longitud d'una barra metàl·lica després d'escalfar-la és $l = l_0(1 + kt)$, on l_0 és la longitud a 0 °C, t la temperatura final i k el coeficient de dilatació lineal. Si una barra de plom mesura 1 m a 800 °C, quina n'és la longitud a 200 °C? (En el plom $k = 3 \cdot 10^{-5}\,°\text{C}^{-1}$).**

Calculem l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right)$, aleshores $l_0 = \frac{125}{128}$

Calculem ara la longitud de la barra a 200 °C:

$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0{,}98242$ m

53 **L'estrella R136a1, descoberta recentment, és a 165 000 anys llum i té una massa equivalent a 265 vegades la massa del Sol. Expressa la distància en quilòmetres i la massa en quilograms. Dóna, en cada cas, fites de l'error absolut i de l'error relatiu. (Massa del Sol = $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg).**

Un any llum és aproximadament $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distància de l'estrella R136a1 a la Terra és: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equival al 0,0032 %.

La massa del Sol és, aproximadament, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de l'estrella R136a1 és: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equival al 0,00095 %.

54 **Calcula k en cada cas.**

a) $\frac{12\,(k-2)!}{k!} = 1$ **b)** $\binom{k}{k-2} = 10$ **c)** $3\binom{k}{4} = 5\binom{k}{2}$ **d)** $\frac{(k+6)!}{(k+4)!} = 72$

a) $\frac{12\,(k-2)!}{k\,(k-1)\,(k-2)!} = 1$; $\frac{12}{k\,(k-1)} = 1$; $12 = k^2 - k$; $k = 4$, $k = -3$

Com que k no pot ser negatiu, $k = 4$.

b) $\frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 10;\ \frac{k(k-1)}{2} = 10;\ k^2 - k = 20;\ k = 5,\ k = -4$

Com que k no pot ser negatiu, $k = 5$.

c) $k \geq 4$

$$3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}{4!(k-4)!} = 5\frac{k(k-1)(k-2)!}{2!(k-2)!} \rightarrow 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} = 5\frac{k(k-1)}{2!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} - 5\frac{k(k-1)}{2} = 0$$

Simplifiquem dividint entre $k(k-1)$, que mai no val zero, ja que $k \geq 4$:

$$3\frac{(k-2)(k-3)}{24} - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow \frac{(k-2)(k-3)-20}{8} = 0;\ \frac{k^2-5k-14}{8} = 0 \begin{cases} k = 7 \\ k = -2 \end{cases}$$

Com que ha de ser $k \geq 4$, la solució és $k = 7$.

d) $\frac{(k+6)(k+5)(k+4)!}{(k+4)!} = 72 \rightarrow (k+6)(k+5) = 72 \begin{cases} k = 3 \\ k = -14 \end{cases}$

Com que $k > 0$, la solució és $k = 3$.

Pàgina 53

Qüestiones teòriques

55 Explica si aquestes frases són certes o falses:

a) Hi ha nombres irracionals que són enters.

b) Tot nombre irracional és real.

c) Tots els nombres decimals són racionals.

d) Entre dos nombres racionals hi ha infinits nombres irracionals.

a) F b) C c) F d) C

56 Si $x \neq 0$, explica si aquestes afirmacions són certes o falses:

a) x^{-2} és negatiu si ho és x.

b) $\sqrt[3]{x}$ té el mateix signe que x.

c) Si $x > 0$, aleshores $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ sempre és positiu pel fet que l'exponent és parell, independentment del signe de x.

b) Vertadera, perquè l'índex de l'arrel és imparell.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

57 Quines d'aquestes igualtats són certes? Explica per què:

a) $\log m + \log n = \log(m + n)$

b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log\frac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log(a^2 - b^2) = \log(a + b) + \log(a - b)$

a) Fals. $\log m + \log n = \log(m \cdot n) \neq \log(m + n)$

b) Fals. $\log m - \log n = \log\left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Vertader. Per una propietat dels logaritmes.

d) Vertader. $log\, x^2 = log\,(x \cdot x) = log\, x + log\, x$

e) Vertader. $log\,(a^2 - b^2) = log\,[(a + b) \cdot (a - b)] = log\,(a + b) + log\,(a - b)$

Per aprofundir

58 **Troba el valor d'aquesta expressió: $(8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$**

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3} = \frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3} = \frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3} = 2^{6n-6n+6}\cdot 3 = 2^6\cdot 3 = 192$$

59 **Determina el valor de p i q perquè es verifiqui: $2^p \cdot 5^q = \dfrac{1}{125\,000}$**

$$2^p\cdot 5^q = \frac{1}{125000} = \frac{1}{2^3 5^6} = 2^{-3}5^{-6}$$

Aleshores $p = -3$ i $q = -6$.

60 **Quin es el nombre de xifres de $4^{16}\cdot 5^{25}$?**

$4^{16}\cdot 5^{25} = 2^{32}\cdot 5^{25} = 2^{32-25}\cdot 10^{25} = 2^7\cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$; per tant, té $3 + 25 = 28$ xifres.

61 **Demostra que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.**

Desenvolupem $(1 + 1)^n$ pel binomi de Newton:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Per altra banda, $(1 + 1)^n = 2^n$; així, doncs, $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$.

62 **Comprova si és vertadera o falsa cada una de les expressions següents:**

a) $|a| < b$ equival a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$

c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

a) Vertadera (sempre que $b > 0$).

b) Falsa; ja que $|-a| \geq 0$ i $-|a| \leq 0$. (Només seria certa per a $a = 0$).

c) Falsa. Només és certa quan a i b tenen el mateix signe.

En general, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

d) Vertadera.

63 **Si d'un nombre imparell al quadrat en restem una unitat, obtenim sempre un múltiple de 8?**

$(2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x = 4x(x + 1)$

Aquesta expressió es múltiple de 4, ja que 4 és factor comú.

A més, o x és parell, o $x + 1$ és parell; per tant, un dels factors que apareixen en l'expressió es múltiple de 2.

El producte será, per tant, múltiple de $4\cdot 2 = 8$.

64 **Si $x > 0$ i $y > 0$, demostra que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{x+y}$.**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}>\frac{1}{x+y}$$

Multipliquem les dues fraccions per $x + y$, que és positiu per ser $x > 0$ i $i > 0$.

Hem de provar que $\dfrac{(x+y)^2}{xy} > 1$

$$\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}=2+\frac{x^2+y^2}{xy}>2>1$$

Aleshores és certa la desigualtat.

Autoavaluació

65 **Classifica els nombres següents indicant a quins dels conjunts ℕ, ℤ, ℚ o ℝ pertanyen:**

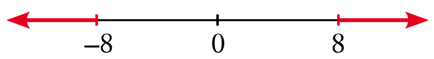
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\overset{\frown}{7}$$

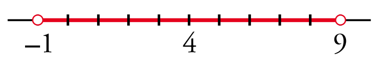
ℕ: $\frac{51}{17}$ ℤ: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8}$ ℚ: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8};\ -\frac{58}{45};\ 1{,}0\overset{\frown}{7}$ ℝ: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8};\ -\frac{58}{45};\ 1{,}0\overset{\frown}{7};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[5]{2^3}$

66 **Expressa-ho en forma d'interval i fes-ne la representació en cada cas:**

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$ b) $(-1, 9)$





67 **Simplifica.**

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$ **b)** $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6}$

68 **Dues esferes metàl·liques de 1 000 kg cada una s'atreuen amb una força de $8{,}35 \cdot 10^{-9}$ N. A quina distància es troben els centres? Aplica-hi la Llei de Gravitació Universal:**

$$F = G\frac{M\,m}{r^2},\ \text{on}\ G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Acota l'error comès.

Substituïm en la fórmula: $8{,}35 \cdot 10^{-9} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} r^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-5};\ r^2 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-5}}{8{,}35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89{,}376$ m

Els seus centres es troben aproximadament a 89,376 m.

La cota de l'error absolut és E.A. < 0,0005 m

E.R. $< \dfrac{0{,}0005}{89{,}376} = 5{,}5943 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000055943$, que correspon al 0,00056 %.

69 **Calcula m en aquesta expressió:** $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \dbinom{m}{2}$

$\dfrac{m!}{(m-1)!} = \dbinom{m}{2} \rightarrow m \geq 2$

$\dfrac{m(m-1)!}{(m-1)!} = \dfrac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!\,2!}$;

$m = \dfrac{m(m-1)}{2};\ 2m = m^2 - m \begin{cases} m = 3 \\ m = 0 \end{cases}$

Com que $m \geq 2$, la solució és $m = 3$.

70 **Calcula, racionalitzant prèviament:**

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6} - \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$$

71 **Aplica-hi la definició de logaritme i obtén** x:

a) $\log_3 x = -\frac{1}{4}$ **b)** $\ln \frac{x}{3} = -1$ **c)** $\log_x 512 = 3$

a) $x = 3^{-(1/4)} \rightarrow x = 0{,}76$

b) $\frac{x}{3} = e^{-1} \rightarrow x = 3 \cdot e^{-1} = 1{,}10$

c) $x^3 = 512 \rightarrow x = 8$

72 **Aplica-hi les propietats dels logaritmes i troba** A:

$$\log A = 2 \log 3 + 0{,}5 \log 4 - 3 \log 2$$

$$\log A = \log \frac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$$

73 **Calcula** x **en cada cas.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $e^{-x} = 425$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \rightarrow x = \frac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$ b) $-x \ln e = \ln 425 \rightarrow x = -\ln 425 = -6{,}05$

74 **En un trapezi rectangle, la base menor mesura** $4-\sqrt{5}$ **cm, la base major,** $7+2\sqrt{5}$ **cm i l'altura,** $4(1+\sqrt{5})$ **cm. Comprova que el perímetre del trapezi és** $10(2+\sqrt{5})$ **cm.**

$$x = (7+2\sqrt{5})-(4-\sqrt{5}) = 3+3\sqrt{5} = 3(1+\sqrt{5})$$

$$l^2 = [4(1+\sqrt{5})]^2 + [3(1+\sqrt{5})]^2 = 16(1+\sqrt{5})^2 + 9(1+\sqrt{5})^2 = 25(1+\sqrt{5})^2$$

$$l = \sqrt{25(1+\sqrt{5})^2} = 5(1+\sqrt{5}) \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5}) =$$

$$= 4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4+4\sqrt{5}+5+5\sqrt{5} =$$

$$= 20+10\sqrt{5} = 10(2\sqrt{5})\text{cm}$$